

© С.П. БАУТИН¹, И.Ю. КРУТОВА²

¹Уральский государственный университет путей сообщения

²Снежинский физико-технический институт

Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ»

SBautin@usurt.ru, IYKrutova@mephi.ru

УДК 532.529+533.6

ЗАКРУТКА ГАЗА ВОКРУГ НАГРЕВАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА ПРИ УЧЕТЕ СИЛ ТЯЖЕСТИ И КОРИОЛИСА

TWIST AROUND HEATING GAS CYLINDER TAKING INTO ACCOUNT THE FORCES OF GRAVITY AND CORIOLIS

В работе исследуются решения системы уравнений газовой динамики в условиях действия сил тяжести и Кориолиса для идеального политропного газа. Поставлена специальная характеристическая задача Коши, решение которой описывает движение первоначально покоящегося в поле тяжести воздуха при плавном нагреве находящегося в нем вертикального цилиндра. Доказано, что при условии аналитичности входных данных поставленная задача в некоторой окрестности рассматриваемой точки имеет единственное аналитическое решение, представимое в виде сходящегося ряда. Анализ первых коэффициентов этого ряда показал, что при начале нагрева цилиндра в воздухе сразу возникает окружное движение газа, закрученное в отрицательном направлении для случая Северного полушария и в положительном направлении — для случая Южного полушария. Установленные факты являются математическим обоснованием направления закрутки огненных вихрей.

The paper studies a system of equations of gas dynamics under the action of gravity and Coriolis for ideal polytropic gas. A special characteristic Cauchy problem has been put; the solution of the problem describes the motion of air in a gravitational field with continuous heating of a vertical cylinder located in it. It is proved that under the condition of analyticity of input data, the problem has the only analytical solution presented as a convergent series. The analysis of the first coefficients of the series showed that as the cylinder is heated, there appears circumferential motion of gas in the air twisted in the negative direction in the Northern Hemisphere, and in the positive direction in the Southern Hemisphere. The established facts are mathematical justification for fire vortex twist direction.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА. Система уравнений газовой динамики, сила Кориолиса и сила тяжести, закрутка газа, тропический циклон, огненный вихрь.

KEY WORDS. System of equations of gas dynamics, the Coriolis force and gravity, spin gas, tropical cyclone, fire vortex.

**Система уравнений газовой динамики
в условиях действия сил тяжести и Кориолиса**

Система уравнений газовой динамики (СУГД) для нестационарных общих пространственных изэнтропических течений политропного газа в условиях действия сил тяжести и Кориолиса в безразмерных переменных имеет следующий вид [1-3]:

$$\begin{cases} c_t + uc_r + \frac{v}{r}c_\varphi + wc_z + \frac{(\gamma-1)}{2}c\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0, \\ u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{2}{(\gamma-1)}\frac{c}{r}c_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{2}{(\gamma-1)}cc_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь: t — время; r, φ, z — пространственные переменные в цилиндрической системе координат; c — скорость звука; u, v, w — радиальная, окружная и вертикальная составляющие вектора скорости газа соответственно; $\gamma = 1.4$ — показатель политропы воздуха; $g = \text{const} > 0$ — ускорение свободного падения; Ω — модуль вектора угловой скорости вращения Земли Ω ; $a = 2\Omega \sin \psi$; $b = 2\Omega \cos \psi$; ψ — широта точки, в которой находится начало декартовой системы координат, вращающейся вместе с Землей (рис. 1), в которой и сделан переход к цилиндрическим координатам.

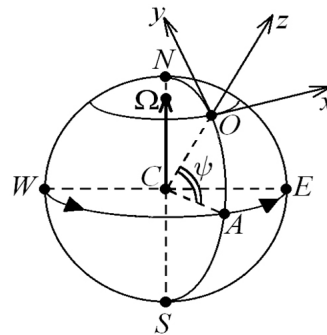


Рис. 1. Система координат на поверхности Земли

Скорость звука c политропного газа связана с температурой T следующей формулой [4]:

$$c = \sqrt{T}.$$

В системе (1) вместо скорости звука в качестве искомой функции вводится температура:

$$T = c^2, \quad T_\eta = 2cc_\eta,$$

где η принимает значения t, r, φ, z и для удобства последующих выкладок первое уравнение системы (1) ставится в конец новой системы:

$$\begin{cases} u_t + uu_r + \frac{v}{r}u_\varphi - \frac{v^2}{r} + wu_z + \frac{1}{(\gamma-1)}T_r = av - bw \cos \varphi, \\ v_t + uv_r + \frac{uv}{r} + \frac{v}{r}v_\varphi + wv_z + \frac{1}{(\gamma-1)}\frac{1}{r}T_\varphi = -au + bw \sin \varphi, \\ w_t + uw_r + \frac{v}{r}w_\varphi + ww_z + \frac{1}{(\gamma-1)}T_z = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g, \\ T_t + uT_r + \frac{v}{r}T_\varphi + wT_z + (\gamma-1)T\left(u_r + \frac{u}{r} + \frac{v_\varphi}{r} + w_z\right) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Закрутка газа в восходящих потоках

В работах [1-3; 5-8] с помощью построения решений системы уравнений (1) представлены результаты математического моделирования течений в разрушительных атмосферных вихрях типа торнадо и тропических циклонов. В частности, доказано [5-8], что при наличии стока газа на вертикальном цилиндре ненулевого радиуса в рассматриваемом течении, внешнем по отношению к цилиндру, возникает закрутка воздуха в соответствующем направлении: положительном и отрицательном в случаях соответственно Северного и Южного полушария. Эти направления соответствуют направлениям закрутки атмосферных восходящих потоков типа торнадо и тропический циклон.

Математически факт закрутки газа в соответствующем направлении установлен при доказательстве существования и единственности решений соответствующих характеристических задач Коши стандартного вида [4; 9] и исследовании свойств этих решений.

Закрутка восходящего потока в указанном направлении подтверждена также результатами экспериментов [10-18] (см. также [3]).

В экспериментах [10-17] свободный восходящий вихрь создавался с помощью нагрева снизу металлического стола. В экспериментах [18] восходящий поток создавался принудительным движением воздуха вверх по трубе за счет работы вентилятора, помещенного в верхней части трубы. При этом на полу вокруг нижнего края трубы фиксировалось вращение воздуха. Поскольку эксперименты проводились в Северном полушарии, то в обеих схемах экспериментов закрутка воздуха была в положительном направлении.

Однако в природе также наблюдаются [19; 20] и так называемые огненные вихри (огненные торнадо), закрутка которых имеет другое направление: отрицательное в случае Северного полушария и положительное в Южном полушарии. На рис. 2 приведена фотография одного огненного вихря, наблюдавшегося в Северном полушарии.

В некоторых экспериментах удалось создать течения, близкие к наблюдаемым в природе огненным вихрям, причем без принудительной закрутки [21].

При численном моделировании нестационарных трехмерных закрученных потоков, возникающих при нагреве подстилающей поверхности, также наблюдается появление вихревых образований, закрученных в отрицательном направлении, хотя в расчетах значение $\sin\psi$ полагалось положительным, что соответствует случаю Северного полушария [22].



Рис. 2. Фотография огненного торнадо

Цель данной работы — построить решение конкретной начально-краевой задачи, которое моделирует движение воздуха вокруг плавно нагревающегося вертикального цилиндра, и установить факт возникновения закрутки воздуха, внешнего по отношению к цилиндру, в отрицательном или в положительном направлениях в случаях соответственно Северного или Южного полушария.

Фоновое течение и его звуковая характеристика

Набор функций [3; 23]:

$$u = 0; \quad v = 0; \quad w = 0; \quad T = T_0(z) = 1 - kz; \quad k = (\gamma - 1)g = \text{const} > 0 \quad (3)$$

является решением системы (2). Он передает покоящийся в поле тяжести газ и далее называется фоновым течением. Скорость звука фонового течения задается формулой:

$$c = c_0(z) = \sqrt{T_0(z)} = \sqrt{1 - kz}.$$

Особо подчеркнем, что в (3) вместе с $u = w = 0$ и $v = 0$, т. е. в фоновом течении закрутки газа нет.

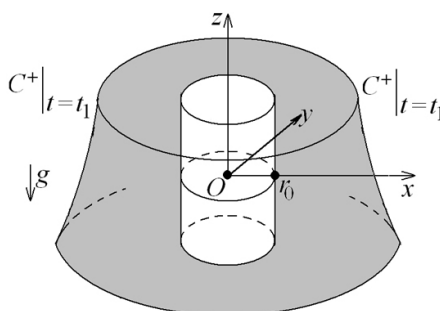


Рис. 3. Область рассматриваемого течения газа

Пусть при $t = 0$ вне цилиндра радиуса $r = r_0$, $r_0 = \text{const} > 0$ (см. рис. 3) находится покоящийся в поле тяжести газ. С момента времени $t = 0$ начинается плавный нагрев этого цилиндра, определяемый аналитической в окрестности точки $(t = 0, z = 0)$ функцией $T = T^0(t, z)$:

$$T(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = T^0(t, z) = T_0(z) + T_1(t), \quad T_1(0) = 0, \quad T_1'(0) = T_* = \text{const} > 0.$$

Исходя из двух последних равенств функцию $T^0(t, z)$ можно представить в виде:

$$T^0(t, z) = T_0(z) + T_*t + T^{01}(t)t^2,$$

со своей заданной аналитической функцией $T^{01}(t)$, и тогда условие плавного нагрева цилиндра принимает такой вид:

$$T(t, r, \varphi, z)|_{r=r_0} = T_0(z) + T_*t + T^{01}(t)t^2. \quad (4)$$

Конфигурация возникшего в результате нагрева цилиндра течения следующая: по покоящемуся в поле тяжести газу в сторону возрастания значений r распространяется поверхность звуковой C^+ -характеристики (см. рис. 3). Эта поверхность в каждый момент времени отделяет еще покоящийся при больших значениях r газ от области газа, начавшего при меньших значениях r движение из-за его нагрева цилиндром. На рис. 3 область движущегося газа затемнена.

Поверхность C^+ -характеристики задается в виде:

$$C^+ : r = r_0 + r_1(t, z), \quad (5)$$

где функция $r_1(t, z)$ является решением следующей задачи Коши [24]:

$$r_{1t} = c_0(z)\sqrt{1 + r_{1z}^2}; \quad r_1(t, z)|_{t=0} = 0, \quad (6)$$

которая по теореме Ковалевской [3] имеет в некоторой окрестности точки $(t = 0, r = r_0, z = 0)$ единственное аналитическое решение, от φ не зависящее.

Построение решения задачи (6) в виде ряда по степеням:

$$r_1(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} r_{1k}(z) \frac{t^k}{k!}; \quad r_{1k}(z) = \left. \frac{\partial^k r_1}{\partial t^k} \right|_{t=0}$$

приводит к следующим первым коэффициентам:

$$r_{10}(z) = 0; \quad r_{11}(z) = c_0(z);$$

$$r_{12}(z) = \left(\left. \frac{\partial}{\partial t} \left[c_0(z)\sqrt{1 + r_{1z}^2} \right] \right|_{t=0} \right) = \left[\frac{c_0(z)r_{1z}r_{1zt}}{\sqrt{1 + r_{1z}^2}} \right]_{t=0} = 0,$$

поскольку:

$$r_{1z}|_{t=0} = (r_1|_{t=0})_z = r_{10}'(z) = 0,$$

и, следовательно, к такому представлению [3; 6-8]:

$$r_1(t, z) = \sqrt{1 - kz} t + r_2(t, z) t^3, \quad (7)$$

с некоторой аналитической функцией $r_2(t, z)$. Еще раз отметим, что от переменной φ функция r_1 не зависит.

Характеристическая задача Коши о движении газа возле нагревающегося цилиндра

Для системы уравнений (2) на поверхности звуковой C^+ -характеристики (5) ставятся условия:

$$\begin{cases} u(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ v(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ w(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = 0; \\ T(t, r, \varphi, z)|_{C^+} = T_0(z), \end{cases} \quad (8)$$

обеспечивающие непрерывное примыкание искомого течения к фоновому, задаваемому формулами (3).

Кроме условий (8) для системы (2) ставится также условие (4).

Решение получившейся задачи (2), (8), (4) описывает искомое течение газа, расположенное между поверхностью звуковой C^+ -характеристики (5) и поверхностью нагревающегося цилиндра $r = r_0$ (см. рис. 3).

Теорема. Задача (2), (8), (4) имеет единственное аналитическое решение в некоторой окрестности точки M_0 с координатами $t = 0$, $r = r_0$, $\varphi = \varphi_0$, $z = 0$, где $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$.

Доказательство теоремы

Доказательство теоремы состоит в сведении задачи (2), (8), (4) к характеристической задаче Коши стандартного вида [4], для которой справедлив соответствующий аналог теоремы Ковалевской [4; 9].

Для сведения к стандартному виду вначале делается следующая замена переменных:

$$\begin{cases} \xi = r_0 + r_1(t, z) - r; \\ \zeta = r - r_0; \\ \varphi' = \varphi; \\ \chi = z, \end{cases} \quad (9)$$

т. е. поверхность звуковой C^+ -характеристики (5) берется за новую координатную плоскость $\xi = 0$, а поверхность цилиндра $r = r_0$ за другую новую координатную плоскость $\zeta = 0$.

В системе (2) делается замена переменных (9):

$$\left\{ \begin{aligned} & (r_{1t} - u + r_{1z}w)u_\xi + uu_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}u_\varphi - \frac{v^2}{(\zeta + r_0)} + \\ & + wu_\chi + \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\zeta - \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\xi = av - bw \cos \varphi; \\ & (r_{1t} - u + r_{1z}w)v_\xi + uv_\zeta + \frac{uv}{(\zeta + r_0)} + \frac{v}{(\zeta + r_0)}v_\varphi + \\ & + wv_\chi + \frac{1}{(\gamma - 1)(\zeta + r_0)}T_\varphi = -au + bw \sin \varphi; \\ & (r_{1t} - u + r_{1z}w)w_\xi + uw_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}w_\varphi + ww_\chi + \\ & + \frac{1}{(\gamma - 1)}T_\chi + \frac{r_{1z}}{(\gamma - 1)}T_\xi = bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g; \\ & (r_{1t} - u + r_{1z}w)T_\xi + uT_\zeta + \frac{v}{(\zeta + r_0)}T_\varphi + wT_\chi + \\ & + (\gamma - 1)T \left[u_\zeta - u_\xi + \frac{u}{(\zeta + r_0)} + \frac{v_\varphi}{(\zeta + r_0)} + w_\chi + r_{1z}w_\xi \right] = 0. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Начальные условия (8), заданные на C^+ -характеристике, переходят в такие условия:

$$u|_{\xi=0} = 0; \quad v|_{\xi=0} = 0; \quad w|_{\xi=0} = 0; \quad T|_{\xi=0} = 1 - k\chi = T_0(\chi), \quad (11)$$

а краевое условие (4) переходит в такое:

$$T_{\zeta=0} = T_0(\chi) + \frac{T_*}{\sqrt{1 - k\chi}} \xi + T_{01}(\xi, \chi) \xi^2, \quad (12)$$

где функция $T_{01}(\xi, \chi)$ считается заданной и аналитической в некоторой окрестности точки $(\xi = 0, \chi = 0)$.

Система (10) в векторно-матричном виде имеет следующее представление:

$$AU_\xi + BU_\zeta + CU_\chi + DU_\varphi = G,$$

где векторы искомым функций U и правых частей G , а также матрицы A, B, C, D таковы:

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ T \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} \frac{v^2}{(\zeta + r_0)} + av - bw \cos \varphi \\ -au + bw \sin \varphi - \frac{uv}{(\zeta + r_0)} \\ bu \cos \varphi - bv \sin \varphi - g \\ -\frac{(\gamma - 1)Tu}{(\zeta + r_0)} \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} R & 0 & 0 & -\frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & \frac{r_{1z}}{(\gamma-1)} \\ -(\gamma-1)T & 0 & (\gamma-1)r_{1z}T & R \end{pmatrix}.$$

Здесь и далее $R = r_{1t} - u + r_{1z}w$.

$$B = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 & \frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ (\gamma-1)T & 0 & 0 & u \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w & \frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0 & 0 & (\gamma-1)T & w \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} \frac{v}{(\zeta+r_0)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v}{(\zeta+r_0)} & 0 & \frac{1}{(\gamma-1)(\zeta+r_0)} \\ 0 & 0 & \frac{v}{(\zeta+r_0)} & 0 \\ 0 & \frac{(\gamma-1)T}{(\zeta+r_0)} & 0 & \frac{v}{(\zeta+r_0)} \end{pmatrix}.$$

Чтобы показать, что рассматриваемая характеристическая задача Коши (10) — (12) сводится к стандартному виду, достаточно подобрать невырожденные матрицы M_1 и M_2 , зависящие от ζ, χ, φ и такие, что произведения $(M_1 A M_2)|_{\xi=0}$ и $(M_1 B M_2)|_{\xi=0}$ имеют требуемый вид [4; 9]. А именно:

$$(M_1 A M_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} & 0 \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} & 0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$(M_1 B M_2)|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} & s_{15} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} & s_{25} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} & s_{35} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} & s_{45} \\ s_{51} & s_{52} & s_{53} & s_{54} & s_{55} \end{pmatrix},$$

и при этом:

$$\det Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{vmatrix} \Big|_{\zeta=\chi=0, \varphi=\varphi_0} \neq 0; \quad s_{55} \Big|_{\zeta=\chi=0, \varphi=\varphi_0} \neq 0.$$

А кроме этого, требуется, чтобы задание условия (12) было эквивалентно заданию соответствующего условия при $\zeta = 0$ для последней компоненты вектора:

$$M_2^{-1} \mathbf{U} = \mathbf{W} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}.$$

В самом деле, после умножения системы (10) слева на M_1 и внесения в соответствующие места произведения $M_2 M_2^{-1}$, равного единичной матрице, получается эквивалентная системе (10) система уравнений:

$$M_1 A M_2 M_2^{-1} \mathbf{U}_\xi + M_1 B M_2 M_2^{-1} \mathbf{U}_\zeta + M_1 C M_2 M_2^{-1} \mathbf{U}_\chi + M_1 D M_2 M_2^{-1} \mathbf{U}_\varphi = M_1 \mathbf{G}.$$

Если теперь заменить вектор $M_2^{-1} \mathbf{U}$ на вектор \mathbf{W} и учесть вид производных вектора \mathbf{W} :

$$\mathbf{W}_g = (M_2^{-1} \mathbf{U})_g = M_2^{-1} \mathbf{U}_g + M_{2g}^{-1} \mathbf{U} = M_2^{-1} \mathbf{U}_g + M_{2g}^{-1} M_2 \mathbf{W}$$

(здесь символ g принимает значения $\zeta, \xi, \chi, \varphi$), то получается система:

$$\begin{aligned} & M_1 A M_2 \mathbf{W}_\xi + M_1 B M_2 \mathbf{W}_\zeta + M_1 C M_2 \mathbf{W}_\chi + M_1 D M_2 \mathbf{W}_\varphi = \\ & = M_1 \mathbf{G} + M_1 B M_2 M_{2\zeta}^{-1} M_2 \mathbf{W} + M_1 C M_2 M_{2\chi}^{-1} M_2 \mathbf{W} + M_1 D M_2 M_{2\varphi}^{-1} M_2 \mathbf{W}. \end{aligned} \quad (13)$$

При вычислении нужных произведений $(M_1 A M_2) \Big|_{\xi=0}$, $(M_1 B M_2) \Big|_{\xi=0}$, в матрицах A и B можно сразу положить $\xi = 0$:

$$A \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} r_{1t} \Big|_{\xi=0} & 0 & 0 & -\frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0 & r_{1t} \Big|_{\xi=0} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{1t} \Big|_{\xi=0} & \frac{r_{1z} \Big|_{\xi=0}}{(\gamma-1)} \\ -(\gamma-1)T_0(\chi) & 0 & (\gamma-1)r_{1z} \Big|_{\xi=0} T_0(\chi) & r_{1t} \Big|_{\xi=0} \end{pmatrix};$$

$$B \Big|_{\xi=0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\gamma-1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\gamma-1)T_0(\chi) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Требуемые матрицы M_1 и M_2 имеют следующий вид:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ (\gamma-1)T_0(\chi) & 0 & -(\gamma-1)r_{1z}|_{\xi=0}T_0(\chi) & r_{1t}|_{\xi=0} \end{pmatrix}, \det M_1 = r_{1t}|_{\xi=0} \neq 0,$$

в некоторой окрестности точки ($\xi = 0$, $\zeta = 0$, $\chi = 0$), поскольку:

$$r_{1t}|_{\xi=\zeta=\chi=0} = 1; M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \det M_2 = 1 \neq 0;$$

$$M_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Осталось установить вид вектора:

$$\mathbf{W} = M_2^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{r_{1z}|_{\xi=0}}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u + \frac{T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ v - \frac{r_{1z}|_{\xi=0}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ w - \frac{r_{1z}|_{\xi=0}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}} \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ W_4 \end{pmatrix}.$$

Начальные условия (11) переходят в начальные условия для \mathbf{W} :

$$W_1|_{\xi=0} = \frac{T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; W_2|_{\xi=0} = -\frac{r_{1z}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; W_3|_{\xi=0} = -\frac{r_{1z}T}{(\gamma-1)r_{1t}|_{\xi=0}}; W_4|_{\xi=0} = T|_{\xi=0}. \quad (14)$$

И поскольку W_4 — последняя координата получившегося вектора \mathbf{W} — совпадает с функцией T , то краевое условие (12) переходит в условие:

$$W_4|_{\xi=0} = T_0(\chi) + \frac{T^*}{\sqrt{1-k\chi}} \xi + T_{01}(\xi, \chi) \xi^2, \quad (15)$$

и обеспечивает единственность получившейся характеристической задачи Коши стандартного вида (13), (14), (15).

Поскольку характеристическая задача Коши (10) — (12) эквивалентна характеристической задаче Коши (13), (14), (15), то теорема доказана.

Построение первых коэффициентов ряда, решающего рассматриваемую задачу

Построим первые коэффициенты ряда:

$$\mathbf{U}(\xi, \zeta, \varphi, \chi) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) \frac{\xi^k}{k!}; \quad \mathbf{U}_k(\zeta, \varphi, \chi) = \left(\frac{\partial^k \mathbf{U}}{\partial \xi^k} \right) \Big|_{\xi=0},$$

решающего характеристическую задачу Коши (10) — (12). Для этого в системе (10) положим $\zeta = 0$ и учтем вид начальных условий (11):

$$\begin{cases} \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right) u_1 - \frac{1}{(\gamma-1)} T_1 = 0, \\ \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right) v_1 = 0, \\ \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right) w_1 + \frac{1}{(\gamma-1)} T_0' + \frac{\left(r_{1\chi} |_{\xi=0} \right)}{(\gamma-1)} T_1 = -g, \\ \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right) T_1 - (\gamma-1) T_0 u_1 + (\gamma-1) T_0 \left[-u_1 + \left(r_{1z} |_{\xi=0} \right) w_1 \right] = 0. \end{cases} \quad (16)$$

С учетом уравнения для функции $T_0(\chi)$, т. е.:

$$(\gamma-1) T_0'(\chi) = -g,$$

получаются следующие три соотношения:

$$u_1 = \frac{1}{(\gamma-1) \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right)} T_1, \quad v_1 = 0, \quad w_1 = \frac{\left(r_{1\chi} |_{\xi=0} \right)}{(\gamma-1) \left(r_{1t} |_{\xi=0} \right)} T_1, \quad (17)$$

поскольку после исключения из последнего уравнения системы (16) величин u_1 , v_1 и w_1 оно становится тождеством, т. е. прямым следствием первых трех уравнений.

Одно свойство решения рассматриваемой задачи

Для обоснования одного конкретного свойства решения рассматриваемой задачи определим в точке ($\zeta = \chi = 0$) знаки первых коэффициентов ряда, решающего характеристическую задачу Коши (10) — (12). И для этого явные формулы, задающие коэффициенты u_1 , v_1 , w_1 , T_1 , v_2 , не нужны.

Чтобы узнать значение коэффициента T_1 при $\zeta = \chi = 0$, необходимо краевое условие (12) продифференцировать по ζ и положить в получившемся равенстве $\zeta = \chi = 0$:

$$T_1|_{\zeta=\chi=0} = T_* > 0. \quad (18)$$

Отсюда, в частности, следует, что при всех значениях $0 \leq \varphi \leq 2\pi$:

$$T_{1\varphi}|_{\zeta=\chi=0} = 0, \quad (19)$$

а также:

$$u_1|_{\zeta=\chi=0} = \frac{1}{(\gamma - 1)} T_1|_{\zeta=\chi=0} = \frac{1}{(\gamma - 1)} T_* > 0. \quad (20)$$

Для получения коэффициента v_2 второе уравнение системы (14) дифференцируется по ζ , полагается $\zeta = 0$ и учитываются компоненты вектора \mathbf{U}_0 :

$$(r_{1z}|_{\xi=0})v_2 = -au_1 + bw_1 \sin \varphi.$$

В последнем равенстве полагается $\zeta = \chi = 0$ и учитывается то, что $w_1|_{\zeta=\chi=0} = 0$ (поскольку $(r_{1z}|_{\xi=\zeta=\chi=0}) = 0$):

$$v_2|_{\zeta=\chi=0} = -au_1|_{\xi=\zeta=\chi=0}.$$

Последнее соотношение приводит к равенству:

$$v_2|_{\zeta=\chi=0} = -\frac{2\Omega \sin \psi}{c_{00}} (u_1|_{\zeta=\chi=0}). \quad (21)$$

Из формулы (21) и с учетом неравенства (20) следует, что в Северном полушарии, где $\sin \psi > 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\zeta=\chi=0} = v_2|_{\zeta=\chi=0} < 0, \quad (22)$$

а в Южном полушарии, где $\sin \psi < 0$:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \Big|_{\xi=\zeta=\chi=0} = v_2|_{\zeta=\chi=0} > 0, \quad (23)$$

при всех значениях $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

С учетом формул для преобразования производных, а также нулевых значений v_0 , v_1 получаются следующие значения для первых двух производных функции v , выводящих со звуковой C^+ -характеристики:

$$\frac{\partial v}{\partial r} \Big|_{C^+} = \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} - \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta} - v_1 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} \Big|_{C^+} = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial \zeta \partial \xi} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \right) \Big|_{\xi=0} = v_{0\zeta\zeta} - 2v_{1\zeta} + v_2 = v_2.$$

Знак выводящей с C^+ -характеристики производной функции u устанавливается следующим образом:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{C^+} = \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \Big|_{\xi=0} = u_{0\zeta} - u_1 = -\frac{1}{(\gamma-1)} T_* < 0.$$

На рис. 4 с учетом установленных знаков выводящих с C^+ -характеристики производных (для v взят случай Северного полушария) показано качественное поведение u, v в ее окрестности в некоторый момент времени $t = t_1 > 0$.

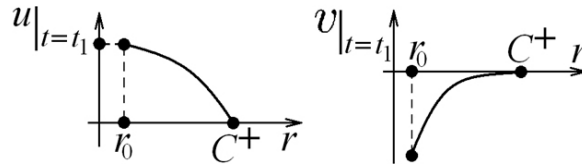


Рис. 4. Качественное поведение скоростей

Таким образом, с учетом неравенств (23), (24) доказано, что в задаче о нагреве вертикального цилиндра при всех $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ в некоторой окрестности звуковой C^+ -характеристики начиная с момента времени $t = 0$ возникает закрутка газа: в отрицательном направлении для случая Северного полушария и в положительном направлении — для случая Южного полушария.

Установленный факт есть математическое обоснование направления закрутки огненных вихрей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баутин С.П. Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.
2. Баутин С. П., Обухов А. Г. Математическое моделирование разрушительных атмосферных вихрей. Новосибирск: Наука, 2012. 152 с.
3. Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчеты, эксперименты. Новосибирск: Наука, 2013. 216 с.
4. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши и ее приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009. 368 с.
5. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке в переменных r, t как характеристическая задача Коши стандартного вида // Вестник УрГУПС. 2011. № 1(10). С. 4-13.
6. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Задача о плавном стоке газа в переменных t, r, φ, χ при учете сил тяжести и Кориолиса // Проблемы прикладной математики и механики. Екатеринбург: УрГУПС. Вып. 95(178)/6м. 2011. С. 17-43.
7. Баутин С.П., Крутова И.Ю. Закрутка газа при плавном стоке в условиях действия сил тяжести и Кориолиса // Теплофизика высоких температур. 2012. Т. 50, № 3. С. 473-475.
8. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu. Twisting of smooth gas flow under the action of gravity and Coriolis Forces // High Temperature. 2012. Vol. 50. № 3. Pp. 444-446.
9. Баутин С.П. Характеристическая задача Коши для квазилинейной аналитической системы // Дифференциальные уравнения. 1976. Т. 12, № 11. С. 2052-2063.
10. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Таекин С.И. О возможности физического моделирования воздушных смерчей в лабораторных условиях // Теплофизика высоких температур. 2008. Т. 46, № 6. С. 957-960.
11. Varaksin, A.Y., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. Tornado-Like Gas-Solid Flow // The 6th Int. Symp. on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion. AIP Conference Proc. 2010. Vol. 1207. Pp. 342-347.

12. Varaksin, A.Y., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. Effect of Net Structures on Wall-Free Non-Stationary Air Heat Vortices // *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2013. Vol. 64. Pp. 817-828.
13. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. К вопросу управления поведением воздушных смерчей // *Теплофизика высоких температур*. 2009. Т. 47, № 6. С. 870-876.
14. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. О возможности визуализации при моделировании воздушных смерчей // *Теплофизика высоких температур*. 2010. Т. 48, № 4. С. 617-622.
15. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. Физическое моделирование воздушных смерчей: некоторые безразмерные параметры // *Теплофизика высоких температур*. 2011. Т. 49, № 2. С. 317-320.
16. Вараксин А.Ю., Протасов М.В., Теплицкий Ю.С. К выбору параметров частиц для визуализации и диагностики свободных концентрированных воздушных вихрей // *Теплофизика высоких температур*. 2014. Т. 52, № 4. С. 581-587.
17. Вараксин А.Ю. Кластеризация частиц в турбулентных и вихревых двухфазных потоках // *Теплофизика высоких температур*. 2014. Т. 52, № 5. С. 777-796.
18. Баутин К.В., Баутин С.П., Макаров В.Н. Экспериментальное подтверждение возможности создания потока воздуха, закрученного силой Кориолиса // *Вестник Уральского государственного университета путей сообщения*. 2013. № 2(18). С. 27-33.
19. Наливкин Д.В. Ураганы, бури и смерчи. Географические особенности и геологическая деятельность. Л.: Наука, 1969. 487 с.
20. Наливкин Д.В. Смерчи. М.: Наука, 1984. 112 с.
21. Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н., Горбачев М.А. О возможной генерации огненных вихрей без использования принудительной закрутки // *Доклады Академии наук*. 2014. Т. 456, № 2. С. 159-161.
22. Обухов А.Г., Баранникова Д.Д. Особенности течения газа в начальной стадии формирования теплового восходящего закрученного потока // *Известия высших учебных заведений. Нефть и газ*. 2014. № 6. С. 65-70.
23. Баутин С.П., Обухов А.Г. Одно точное стационарное решение системы уравнений газовой динамики // *Известия высших учебных заведений. Нефть и газ*. 2013. № 4. С. 81-86.
24. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М.; Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003. 336 с.

REFERENCES

1. Bautin, S.P. Tornado and Coriolis force. Novosibirsk, 2008. 96 p. (in Russian).
2. Bautin, S.P., Obukhov, A.G. Mathematical modeling of destructive atmospheric vortices. Novosibirsk, 2012. 152 p. (in Russian).
3. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu., Obukhov, A.G., Bautin, K.V. Destructive atmospheric vortices: theorems, calculations, experiments. Novosibirsk, 2013. 216 p. (in Russian).
4. Bautin, S.P. Characteristic Cauchy problem and its applications in gas dynamics. Novosibirsk, 2009. 368 p. (in Russian).
5. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu. A problem about a smooth flow with the variables r, t as a standard Cauchy problem // *UrGUPS Bulletin*. 2011. Vol. 1(10). Pp. 4-13. (in Russian).
6. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu. A problem about a smooth gas flow with the variables t, r, φ, χ taking into account gravity and Coriolis // *Issues of applied mathematics and mechanics*. 2011. Vol. 95(178). Pp. 17-43. (in Russian).
7. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu. Twisting of smooth gas under the action of gravity and Coriolis forces // *Thermophysics of High Temperatures*. 2012. Vol. 20. № 3. Pp. 473-475. (in Russian).
8. Bautin, S.P., Krutova, I.Yu. Twisting of smooth gas flow under the action of gravity and Coriolis Forces // *High Temperature*. 2012. Vol. 50, № 3. Pp. 444-446.
9. Bautin, S.P. Cauchy characteristic problem for quasi-linear analytic system // *Differential Equations*. 1976. Vol. 12. № 11. Pp. 2052-2063. (in Russian).

10. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Taekin S.I. On physical modelling of air vortices in laboratory conditions // Thermophysics of High Temperatures. 2008. Vol. 46. № 6. Pp. 957-960. (in Russian).
11. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. Tornado-like gas-solid flow // The 6th Int. Symp. on Multiphase Flow, Heat Mass Transfer and Energy Conversion. AIP Conference Proc. 2010. Vol. 1207. Pp. 342-347.
12. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. Effect of Net Structures on Wall-Free Non-Stationary Air Heat Vortices // Int. J. Heat Mass Transfer. 2013. Vol. 64. Pp. 817-828.
13. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. On the issue of influencing air vortices behaviour // Thermophysics of High Temperatures. 2009. Vol. 47. № 6. Pp. 870-876. (in Russian).
14. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N. On the possibility of visualizing air vortex modeling // Thermophysics of High Temperatures. 2010. Vol. 48. № 4. Pp. 617-622. (in Russian).
15. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. Physical modeling of air vortices: nondimensional parameters // Thermophysics of High Temperatures. 2011. Vol. 49. № 2. Pp. 317-320. (in Russian).
16. Varaksin, A.Yu., Protasov, M.V. Teplitskiy, Yu.S. On the choice of particle parameters for visualizing and diagnostics of free concentrated air vortices // Thermophysics of High Temperatures. 2014. Vol. 52. № 4. Pp. 581-587. (in Russian).
17. Varaksin, A.Yu. Particle clustering in turbulent and vortex-type two-phase flows // Thermophysics of High Temperatures. 2014. Vol. 52. № 5. Pp. 777-796. (in Russian).
18. Bautin, K.V., Bautin, S.P., Makarov, V.N. Empirical verification of a possibility to create an airflow twisted under the action of Coriolis forces // UrGUPS Bulletin. 2013. № 2(18). Pp. 27-33. (in Russian).
19. Nalivkin, D.V. Hurricanes, storms and vortices. Geographic characteristics and geological activity. Leningrad, 1969. 487 p. (in Russian).
20. Nalivkin, D.V. Vortices. Moscow, 1984. 112 p. (in Russian).
21. Varaksin, A.Yu., Romash, M.E., Kopeitsev, V.N., Gorbachev, M.A. On a possibility of fire vortex generation without the application of forced swirling // Proceedings of the Academy of Sciences. 2014. Vol. 456. № 2. Pp. 159-161. (in Russian).
22. Obukhov, A.G., Barannikova, D.D. Gas flow parameters on the initial stage of twisted upward heat flow formation // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2014. № 6. Pp. 65-70. (in Russian).
23. Bautin, S.P., Obkhov, A.G. One explicit stationary solution of the system of equations of gas dynamics // Proceedings of Higher Educational Institutions. Oil and Gas. 2013. № 4. Pp. 81-86. (in Russian).
24. Ovsyannikov, L.V. Lectures on fundamentals of gas dynamics. Moscow; Izhevsk, 2003. 336 p. (in Russian).

Авторы публикации

Баутин Сергей Петрович — профессор кафедры высшей и прикладной математики Уральского государственного университета путей сообщения, доктор физико-математических наук

Крутова Ирина Юрьевна — доцент кафедры высшей математики Снежинского физико-технического института Национального исследовательского ядерного университета «МИФИ», кандидат физико-математических наук

Authors of the publication

Sergey P. Bautin — Dr. Phys. and Math. Sci., Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Ural State University of Railway Engineering

Irina Yu. Krutova — Cand. Phys. and Math. Sci., Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Snezhinsk Physical-Technical Institute, MIFI National Research Nuclear University